Hreyfing massa (*m)* í skalarsviði Newtons (*GM/r)*.

Hreyfingu massa *m<<M* má hluta upp í "Radial" og "Angular" liði - þar sem "Radial" liðurinn hefur stefnu á þyngdarsviðsmassanum *M*, en "Angular" liðurinn er í stefnu þvert þar á. Við þessa liðun tekur heildarorkan á sig einfalda mynd, þ.e. skrið– , hverfi– og stöðuorkan:

$$E = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\vec{v}_R + \vec{v}_A\right)^2 - \frac{G\cdot M\cdot m}{r} = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot \vec{v}_R^{\,2} + \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot \vec{v}_A^{\,2} - \frac{G\cdot M\cdot m}{r} \qquad (1)$$

Í jöfnu 1 eru vigrarnir $\mathbf{v}_R$ og $\mathbf{v}_A$ hornréttir. Hverfiþungann ***L*** má einfalda verulega:

$$\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\cdot\vec{r}\times\left(\vec{v}_R + \vec{v}_A\right) = m\cdot\vec{r}\times\vec{v}_A = m\cdot r^2\cdot\vec{\omega} \qquad (2)$$

Jafna 2 fæst með notkun $v_A = rd\theta/dt = r\omega$. Hverfiþungann *L* má nota til þess að losna við $\mathbf{v}_A$ sem breytu í heildarorkunni, jöfnu 1, - þar sem ***L*** er fasti hverrar brautar:

$$E = \tfrac{1}{2}\cdot m\cdot\left(\vec{v}_R^{\,2} + \frac{L^2}{m^2\cdot r^2}\right) - \frac{G\cdot M\cdot m}{r} \qquad (3)$$

Nú má því leysa $\boldsymbol{v}_R$ úr jöfnu 3 og túlka það sem fall af *r* - fyrir sérhvern massa sem komið er á braut, þar sem brautin einkennist af föstunum *E* og *L* - sem gefur okkur þá:

$$v_R = \frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2 r^2}} \qquad (4)$$

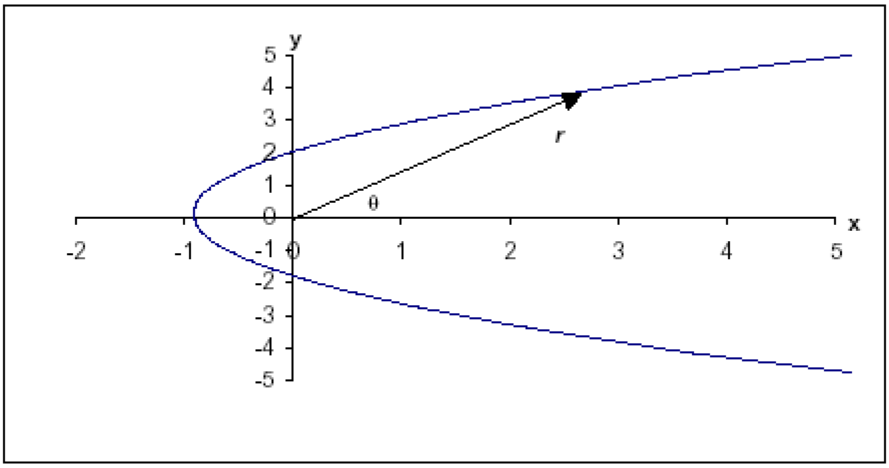
Hér væri hægt aðaðskilja breytistærðirnar r & t og heilda – en það yrði mikil vinna. Við förum styttri leið með þvi að skoða tilfelli Fleygboga, Ellipsu og Breiðboga sérstaklega og kanna heildarorku hvers tilfellis.

I) Fleygbogi (Parabol) hefur jöfnu $r = 2a/(1-\cos\theta)$ - þar sem *a* er minnsta nánd brautar. Deildi *r(t)* með tilliti til tímas gefur $\boldsymbol{v}_R$ sem rita má á eftirfarandi hátt:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{2\cdot a\cdot\sin\theta}{(1-\cos\theta)^2}\cdot\frac{d\theta}{dt} = -\frac{L\cdot\sin\theta}{2\cdot a\cdot m} = -\sqrt{\frac{L^2}{a\cdot m^2\cdot r} - \frac{L^2}{m^2\cdot r^2}} \qquad (5)$$

Með samanburði við Radíal hraðann $\boldsymbol{v}_R$ sést að heildarorkan er *E=0* – sem og - að fastinn *a* í fleygbogajöfnunni er $a = L^2/(2GMm^2)$ - sem gefur að lokum jöfnu brautarinnar sem:

$$r(\theta) = \frac{(L/m)^2}{G\cdot M\cdot(1-\cos\theta)} \qquad (6)$$



Fleygbogi

II) Sporaskja (Ellipse) lítur jöfnunni: $r = a(1-\varepsilon^2)/(1-\varepsilon \cdot \cos\theta)$ - þar sem *2a* er stærri ás (major axis) og ε er hjámiðjan (eccentricity). Deildi m.t.t. tíma gefur $\boldsymbol{v}_R$:

$$\frac{dr}{dt} = \cdots = -\frac{L \cdot \varepsilon \cdot \sin\theta}{a \cdot m \cdot \left(1-\varepsilon^2\right)} = -\sqrt{-\frac{L^2}{a^2 \cdot \left(1-\varepsilon^2\right) \cdot m^2} + \frac{2L^2}{a \cdot \left(1-\varepsilon^2\right) \cdot m^2 \cdot r} - \frac{L^2}{m^2 \cdot r^2}} \qquad (7)$$

Með samanburði við Radíal hraðann $\boldsymbol{v}_R$ sést, að heildarorkan er neikvæð, sem og, að fastinn *a* í ellipsujöfnuni er $a = L^2/(GMm^2(1-\varepsilon^2))$ sem gefur jöfnu ellipsubrautar sem:

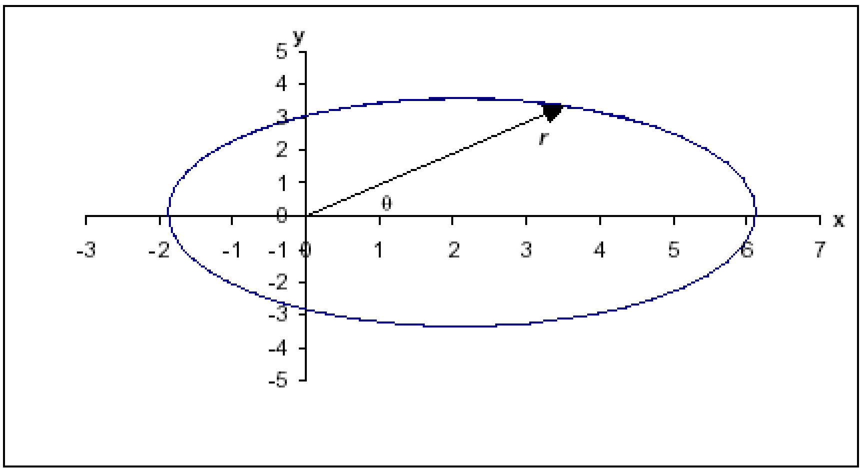
$$r(\theta) = \frac{\left(L/m\right)^2}{G \cdot M \cdot (1-\varepsilon \cdot \cos\theta)} \qquad (8)$$

Ef við látum ε*=1* fæst líking svipuð jöfnu 6 fyrir tilfelli Fleygbogans. Heildarorkan fæst einnig hér með samanburði við jöfnu 4 fyrir $\boldsymbol{v}_R$ sem gefur:

$$E = -\tfrac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{a^2 \cdot \left(1-\varepsilon^2\right) \cdot m} = -\frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot a} \qquad (9)$$

Nú má reikna út hjámiðjuna ε sem:

$$\varepsilon^2 = 1 + \frac{2 \cdot E \cdot L^2}{G \cdot M \cdot m^3} \qquad (10)$$



Sporaskja

III) Breiðbogi (Hyperbol) hefur jöfnuna $r = a(\varepsilon^2 - 1)/(1 - \varepsilon \cdot \cos\theta)$. Deildi m.t.t. tíman gefur $\boldsymbol{v}_R$:

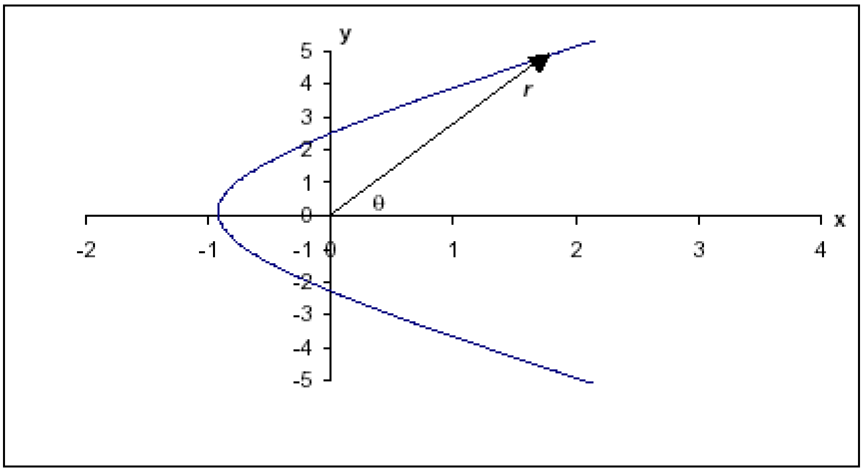
$$\frac{dr}{dt} = \cdots = -\frac{L \cdot \varepsilon \cdot \sin\theta}{a \cdot m \cdot (\varepsilon^2 - 1)} = -\sqrt{\frac{L^2}{a^2 \cdot (\varepsilon^2 - 1) \cdot m^2} + \frac{2L^2}{a \cdot (\varepsilon^2 - 1) \cdot m^2 \cdot r} - \frac{L^2}{m^2 \cdot r^2}} \qquad (11)$$

Með samanburði við Radíal hraðann $\boldsymbol{v}_R$ sést að heildarorkan hér er jákvæð, og fastinn er $a = L^2/(GMm^2(\varepsilon^2-1))$ sem gefur jöfnu breyðbogans:

$$r(\theta) = \frac{(L/m)^2}{G \cdot M \cdot (1 - \varepsilon \cdot \cos\theta)} \qquad (12)$$

Ef við látum $\varepsilon=1$ fæst líking svipuð jöfnu 6 fyrir tilfelli Fleygboga. Heildarorkan fæst með samanburði við jöfnu 4 fyrir $\boldsymbol{v}_R$ sem gefur:

$$E = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{a^2 \cdot (\varepsilon^2 - 1) \cdot m} = \frac{G \cdot M \cdot m}{2 \cdot a} \qquad (13)$$



Breiðbogi

That's all for now...